

VARIÉTÉS KÄHLERIENNES ET PREMIÈRE CLASSE DE CHERN

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Introduction

Dans deux intéressants articles [3], [4], S. Kobayashi a étudié les variétés kähleriennes compactes W_n admettant une première classe de Chern définie positive ou définie négative. Le but du présent article est d'obtenir certaines propriétés des tenseurs holomorphes de W_n (contravariants ou covariants) sous des hypothèses plus faibles concernant $c_1(W_n)$ (caractère non positif ou non négatif). On en déduit en particulier des propriétés du plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n (voir [9]).

Les principaux résultats sont énoncés dans les théorèmes 1 et 2 (§11 et 12) et constituent, en un certain sens, une extension de résultats de Nakano, Kobayashi et Kodaira.

Les lemmes 1, 2 et 3 donnent les principaux instruments permettant d'établir ces théorèmes qui font intervenir aussi la proposition 2 du §10. Celle-ci fournit une condition nécessaire et suffisante commode, en termes d'opérateurs introduits par Kodaira, pour qu'un tenseur antisymétrique (contravariant) soit holomorphe. Certains des résultats ont été énoncés dans [10].

Dans un but de simplicité, on a regroupé dans les §1 à 3 certaines des notations et des formules utilisées.

1. Variété complexes

a) W_n étant une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension réelle $2n$, supposons qu'elle admette une *structure analytique complexe*. Un système de coordonnées locales complexes est défini dans un domaine U de W_n par :

$$\phi_U : z \in U \rightarrow \{z^\alpha\} \in \mathbb{C}^n \quad (\alpha = 1, \dots, n).$$

Nous posons $z^\alpha = \bar{z}^\alpha$ ($\bar{\alpha} = n + 1, \dots, 2n$) et désignons par $\{z^k\}$ ($k = 1, \dots, 2n$) l'ensemble des $2n$ nombres complexes $\{z^\alpha, z^{\bar{\alpha}}\}$. Dans l'intersection $U \cap V$ des domaines de deux systèmes de coordonnées complexes, les coordonnées complexes $\{z^\alpha\}$ de z considéré comme appartenant à U , sont des fonctions

holomorphes, à jacobien \mathcal{J}_V^U non nul, des coordonnées complexes $\{z^i\}$ du même point z considéré comme appartenant à V . La structure complexe munit W_n d'une orientation naturelle.

On sait que la structure complexe de W_n détermine en chaque point z de la variété une structure complexe de l'espace vectoriel tangent T_z qui peut être définie soit par un sous-espace complexe convenable S_z^c , de dimension complexe n , du complexifié T_z^c de T_z ($S_z^c \cap \bar{S}_z^c = 0$), soit par l'opérateur J_z , de carré—Id, défini de la manière suivante: si v de composantes $v^\alpha, v^{\bar{\alpha}}$ appartient à T_z^c , on a:

$$(J_z v)^\alpha = i v^\alpha, \quad (J_z v)^{\bar{\alpha}} = -i v^{\bar{\alpha}}.$$

Le champ J des opérateurs J_z définit la structure "presque complexe" de W_n déterminée par sa structure complexe; S_z^c et \bar{S}_z^c sont les deux sous espaces propres de J_z et

$$(1.1) \quad T_z^c = S_z^c \oplus \bar{S}_z^c.$$

b) L'existence de cette décomposition—ou si l'on préfère celle d'indices de deux espèces—conduit à la *notion de type* pour un tenseur et pour un opérateur.

Nous appelons *p-forme* une forme différentielle extérieure à valeurs complexes de degré p . Par abréviation, nous appelons *p-tenseur* un tenseur *contravariant antisymétrique* complexe d'ordre p .

Soit d l'opérateur de différentiation extérieure sur les formes. Nous posons ici $d = d' + d''$, où d' est de type $(1, 0)$ et d'' de type $(0, 1)$. De $d^2 = 0$, on déduit par considération des types:

$$(1.2) \quad d'^2 = 0, \quad d''^2 = 0, \quad d' d'' + d'' d' = 0.$$

Une *p-forme holomorphe* est une *p-forme* β de type $(p, 0)$ telle que $d''\beta = 0$. Il est équivalent de dire que c'est une forme de type $(p, 0)$ qui, pour tout voisinage U de coordonnées locales complexes, a pour coefficients des fonctions holomorphes dans U des z^α .

Un *p-tenseur holomorphe* est un *p-tenseur* A de type $(p, 0)$ qui, pour tout voisinage U de coordonnées locales complexes, a pour composantes des fonctions holomorphes dans U des z^α .

c) Une *transformation holomorphe* de W_n est une transformation de W_n laissant invariante sa structure complexe, ou—ce qui est équivalent—laissant J invariant. Une transformation infinitésimale (t.i.) définie par un champ de vecteurs X est une *t.i. holomorphe* si:

$$(1.3) \quad \mathcal{L}(X)J = 0$$

où $\mathcal{L}(X)$ est l'opérateur de transformation infinitésimale (ou de dérivation de Lie). En coordonnées locales complexes, (1.3) s'écrit:

$$(1.3') \quad \partial_{\beta} X^{\alpha} = 0, \quad \left(\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}, \quad \partial_{\beta} = \frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \right).$$

(1.3') exprime que $X^{(1,0)}$, partie de type $(1, 0)$ de X , est un 1-tenseur ou vecteur holomorphe. Si X définit une t.i. holomorphe, il en est de même pour JX et l'on a :

$$(1.4) \quad [JX, Y] = [X, JY] = J[X, Y].$$

Dans la suite W_n est supposée compacte.

Soit G le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n compacte. Bochner et Montgomery ont établi que G est un groupe de Lie complexe opérant sur W_n de manière analytique complexe ou holomorphe. L'algèbre de Lie de G peut être identifiée à l'algèbre L_n des transformations infinitésimales holomorphes. D'après (1.4), J définit sur L_n une structure d'algèbre de Lie complexe et celle-ci correspond à la structure complexe de G .

2. L'idéal I de L_n

a) Si h est une 1-forme holomorphe de W_n , X un élément de L_n , le scalaire $X^{\alpha} h_{\alpha}$ est holomorphe sur la variété compacte W_n . Par suite :

$$(2.1) \quad i(X)h = X^{\alpha} h_{\alpha} = \text{const.}$$

où $i(X)$ désigne l'opérateur de produit intérieur par X .

Soit $H^{(1)}$ l'espace vectoriel complexe des 1-formes holomorphes fermées. On sait que toute forme $h \in H^{(1)}$ à périodes imaginaires pures est nécessairement nulle. Si $b_p(W_n)$ désigne le p^e nombre de Betti de la variété, on a donc $\dim_{\mathbb{R}} H^{(1)} \leq b_1(W_n)$. Nous désignons par $H_0^{(1)}$ le sous-espace de $H^{(1)}$ défini par les éléments h de $H^{(1)}$ tels que $i(X)h = 0$ pour tout $X \in L_n$.

b) Soit I l'espace vectoriel complexe défini par les $X \in L_n$ tels que :

$$i(X)h = 0 \quad \text{pour tout } h \in H^{(1)}.$$

Si $X, Y \in L_n$ considérons le crochet $Z = [X, Y]$ et le produit :

$$i(Z)h = Z^{\alpha} h_{\alpha} = X^{\beta} \partial_{\beta} Y^{\alpha} h_{\alpha} - Y^{\beta} \partial_{\beta} X^{\alpha} h_{\alpha}$$

soit :

$$i(Z)h = X^{\beta} \partial_{\beta} (Y^{\alpha} h_{\alpha}) - Y^{\beta} \partial_{\beta} (X^{\alpha} h_{\alpha}) - X^{\alpha} Y^{\beta} (\partial_{\alpha} h_{\beta} - \partial_{\beta} h_{\alpha}) = 0.$$

Ainsi si $L'_n = [L_n, L_n]$ est l'idéal dérivé de L_n , on a $L'_n \subset I$ et I est un idéal de L_n tel que L_n/I soit abélien [9].

La forme bilinéaire $i(X)h$ (où $X \in L_n$, $h \in H^{(1)}$) met en dualité les espaces vectoriels L_n/I et $H^{(1)}/H_0^{(1)}$. Par suite :

$$\dim_{\mathbb{C}} L_n - \dim_{\mathbb{C}} I = \dim_{\mathbb{C}} H^{(1)} - \dim_{\mathbb{C}} H_0^{(1)}.$$

3. Variétés Kähleriennes

a) Dans toute la suite, nous supposons que la variété compacte W_n considérée admet une *métrique kähliérienne* qui s'écrit localement

$$(3.1) \quad ds^2 = 2g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha dz^{\bar{\beta}}$$

la 2-forme (réelle) fondamentale associée étant :

$$(3.2) \quad F = ig_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

Pour que la métrique hermitienne (3.1) soit kähliérienne, il faut et il suffit que la 2-forme F soit *fermée*. Elle est alors à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne définie par la métrique [8]. En coordonnées locales complexes, les seuls coefficients non nécessairement nuls de cette connexion sont ceux de types purs :

$$\Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha, \quad \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = \bar{\Gamma}_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha.$$

Soit A un p -tenseur de type $(p, 0)$. A un tel p -tenseur correspond de manière naturelle, par dualité définie par la métrique et conjugaison, une p -forme notée $\alpha(A)$ de type $(p, 0)$ avec :

$$\overline{(\alpha(A))}_{p_1 \dots p_p} = g_{p_1 \sigma_1} \dots g_{p_p \sigma_p} A^{\sigma_1 \dots \sigma_p}.$$

Inversement toute forme de type $(p, 0)$ est l'image par α d'un p -tenseur de type $(p, 0)$.

Nous notons (α, β) le produit intérieur de deux p -formes considéré comme une fonction du point $z \in W_n$, par $\langle \alpha, \beta \rangle$ le produit scalaire global

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{W_n} (\alpha, \beta) \eta,$$

où η est la forme élément de volume définie par la métrique et l'orientation de W_n .

b) Soit δ l'opérateur de codifférentiation sur les formes qui s'exprime immédiatement, au signe près, par la dérivation covariante contractée. On pose $\delta = \delta' + \delta''$, où δ' est de type $(-1, 0)$, et δ'' de type $(0, -1)$. De $\delta^2 = 0$, on déduit encore :

$$(3.3) \quad \delta'^2 = 0, \quad \delta''^2 = 0, \quad \delta' \delta'' + \delta'' \delta' = 0.$$

On sait que δ est transposé de d par le produit scalaire introduit. De même δ' est transposé de d' et δ'' de d'' , ce qui se traduit par les relations :

$$\langle d'\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta'\beta \rangle, \quad \langle d''\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta''\beta \rangle.$$

Le laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$ de G. de Rham sur les formes admet aussi, sur une variété kählérienne les expressions :

$$(3.4) \quad \Delta = 2(d'\delta' + \delta'd') = 2(d''\delta'' + \delta''d'').$$

Soit enfin M l'opérateur linéaire sur les formes défini sur les formes de type (p, q) par la relation :

$$M\alpha_{p,q} = (p - q)i\alpha_{p,q}.$$

On établit [8] que cet opérateur satisfait aux relations de commutation :

$$(3.5) \quad \delta M - M\delta = d\Delta - \Delta d, \quad dM - Md = -[\delta L - L\delta] = -i(d' - d''),$$

où L (resp. Δ) sont les opérateurs de produit extérieur (resp. intérieur) pour la forme F . Il en résulte aisément que Δ commute avec les opérateurs L et Δ .

c) Soit $H^{(p)}$ l'espace complexe des p -formes holomorphes de W_n ; nous désignons par $b_{p,0}(W_n)$ sa dimension complexe.

Si $\beta \in H^{(p)}$, elle vérifie $d''\beta = 0$ et aussi $\delta''\beta = 0$ pour une raison de type; β est par suite harmonique au sens de Δ d'après (3.4), donc fermée ($d\beta = 0$) et cofermée ($\delta\beta = 0$). Ainsi sur une variété kählérienne, toute p -forme holomorphe est fermée et même harmonique.

Il en est en particulier ainsi pour les 1-formes holomorphes qui sont intervenues au §2. On voit de plus que $b_1(W_n) = 2b_{1,0}(W_n)$.

d) Soit A un p -tenseur holomorphe sur W_n . On a :

$$(3.6) \quad \partial_{\bar{\beta}} A^{\rho_1 \dots \rho_p} = \nabla_{\bar{\beta}} A^{\rho_1 \dots \rho_p} = 0,$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne. Par passage à la forme $\alpha(A)$, les relations (3.6) se traduisent par :

$$(3.7) \quad \nabla_{\bar{\beta}} \alpha(A)_{\rho_1 \dots \rho_p} = 0.$$

Par antisymétrisation de (3.7), on voit que $\alpha(A)$ est nécessairement d' -fermée ($d'\alpha(A) = 0$). On sait que d' (ou d'') définit une cohomologie localement triviale. Du théorème de décomposition de Hodge—de Rham il résulte que l'on peut décomposer $\alpha(A)$, d' -fermée, selon :

$$(3.8) \quad \alpha(A) = d'\beta + H\alpha(A),$$

où β est une $(p-1)$ -forme et où $H\alpha(A)$ est une p -forme holomorphe. Le scalaire holomorphe défini par le produit intérieur ($\alpha(A)$, $H\alpha(A)$) est une constante et nous posons :

$$(3.9) \quad k(A) = (\alpha(A), H\alpha(A)) .$$

On a par orthogonalité:

$$(3.10) \quad \langle H\alpha(A), H\alpha(A) \rangle = \langle \alpha(A), H\alpha(A) \rangle = k(A) \int_{W_n} \eta .$$

Ainsi pour que $k(A) = 0$, il faut et il suffit que $H\alpha(A) = 0$ c'est-à-dire que $\alpha(A)$ soit *d'*-cohomologue à zéro.

Considérons en particulier le cas $p = 1$, c'est-à-dire le cas des t.i. holomorphes X . Nous pouvons les définir à partir des 1-formes $\xi = \alpha(X^{(1,0)})$, de type $(1, 0)$, vérifiant $\nabla_{\beta} \xi_{\alpha} = 0$. La décomposition (3.8) s'écrit dans ce cas

$$(3.11) \quad \xi = d'\rho + H\xi ,$$

où ρ est un scalaire complexe. Pour que $X \in I$, il faut et il suffit que $k(X^{(1,0)}) = i(X)H\xi = 0$, c'est-à-dire que ξ vérifie $\nabla_{\beta} \xi_{\alpha} = 0$ et soit *d'* cohomologue à zéro [9].

4. Caractère positif ou nul d'une classe de cohomologie de type (1.1)

a) Soit γ une 2-forme réelle de type $(1, 1)$. A cette 2-forme qui s'écrit localement

$$\gamma = \gamma_{\alpha\beta} dz^{\alpha} \wedge dz^{\beta}$$

associons la forme hermitienne c des composantes

$$c_{\alpha\beta} = -i\gamma_{\alpha\beta} .$$

En particulier à la 2-forme F de W_n se trouve ainsi associée la métrique de W_n . Nous écrirons $\gamma \geq 0$ (resp ≤ 0) si la forme hermitienne c associée à γ est positive ou nulle (resp. négative ou nulle) aux différents points de W_n .

b) Supposons γ fermée et notons $[\gamma]$ sa classe de cohomologie réelle. D'après la classique décomposition en classes primitives par rapport à la classe fondamentale $[F]$, on a:

$$(4.1) \quad [\gamma] = a[F] + [\beta] \quad (A[\beta] = 0)$$

(où a est une constante réelle) ou en termes de formes:

$$(4.2) \quad \gamma = aF + \beta + d\mu$$

avec $A\beta = 0$ et μ , 1-forme. Par produit par A , il vient:

$$A\gamma = an + Ad\mu .$$

Mais d'après (3.5)

$$d\Lambda\mu - \Lambda d\mu = \delta M\mu - M\delta\mu$$

où $d\Lambda\mu = M\delta\mu = 0$ pour des raisons de degré. Ainsi :

$$\Lambda\gamma = a\eta - \delta M\mu.$$

Par intégration sur W_n , il vient :

$$(4.3) \quad a\eta = \int_{W_n} (\Lambda\gamma)\eta.$$

Si γ , non identiquement nulle, est ≥ 0 , $\Lambda\gamma$ est ≥ 0 et non identiquement nul. On a donc $a > 0$ et, d'après (4.1), la classe $[\gamma]$ de la forme envisagée est certainement $\neq 0$. Il en résulte qu'une classe de cohomologie non nulle de type $(1, 1)$ ne peut contenir simultanément une forme ≥ 0 et une forme ≤ 0 .

Nous dirons qu'une classe de type $(1, 1)$ est ≥ 0 (resp. ≤ 0) si elle contient une forme fermée ≥ 0 (resp. ≤ 0). Une classe à la fois ≥ 0 et ≤ 0 est certainement nulle.

c) Nous notons $c_1(W_n)$ la première classe de Chern c'est-à-dire celle de degré 2—de la variété W_n . Soit R le tenseur de Ricci de la variété, dont nous désignons par $R_{\alpha\bar{\beta}}$ les composantes en coordonnées locales complexes dans un domaine U . Si g_U désigne le discriminant dans U de la métrique :

$$(4.4) \quad R_{\alpha\bar{\beta}} = -\partial_\alpha\bar{\partial}_\beta \log \sqrt{g_U}.$$

On sait que $c_1(W_n)$ peut être définie par une 2-forme réelle fermée τ , à périodes entières, qui ne diffère de la 2-forme associée à R que par un facteur de normalisation. Plus précisément sur U :

$$(4.5) \quad \tau = (2\pi)^{-1}iR_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

Nous nous intéressons ici aux cas où $c_1(W_n) \geq 0$ et $c_1(W_n) \leq 0$, c'est-à-dire au cas où la classe de cohomologie réelle définie par $c_1(W_n)$ est positive ou nulle, ou bien négative ou nulle. Il en est ainsi pour un certain nombre de variétés algébriques intéressantes.

Les cas où $c_1(W_n)$ contient une forme partout définie positive ou définie négative ont été étudiés par de nombreux auteurs, en particulier Kodaira, Nakano, Andreotti et S. Kobayashi [4], [5]. Une fraction notable de leurs résultats se laisse généraliser de manière convenable aux hypothèses faites ici.

5. Interprétation de $c_1(W_n) = 0$

a) Rappelons à quelle condition une 2-forme réelle fermée γ de type $(1, 1)$

est homologue à 0. Il existe alors une 1-forme réelle λ telle que:

$$\gamma = d\lambda.$$

Posons, par décomposition selon les types:

$$\lambda = \lambda_{(1,0)} + \lambda_{(0,1)}$$

où, d'après la réalité de λ , on a: $\bar{\lambda}_{(1,0)} = \lambda_{(0,1)}$. Pour $d\lambda$, on obtient:

$$d\lambda = d'\lambda_{(1,0)} + (d''\lambda_{(1,0)} + d'\lambda_{(0,1)}) + d''\lambda_{(0,1)}.$$

Pour que $\gamma = d\lambda$ soit de type (1, 1), il faut et il suffit que $d'\lambda_{(1,0)} = 0$; $\lambda_{(1,0)}$ étant d' -fermée peut s'écrire:

$$\lambda_{(1,0)} = d'\rho + h,$$

où h est une 1-forme holomorphe ($d''h = 0$) et ρ un scalaire complexe. On en déduit:

$$(5.1) \quad d\lambda = d''d'\rho + d'd''\bar{\rho} = d'd''(\bar{\rho} - \rho).$$

Posons $\bar{\rho} - \rho = i\varphi$, où φ est un scalaire réel. Il résulte de (5.1) que si γ de type (1, 1) est homologue à 0, il existe un scalaire réel φ tel que:

$$(5.2) \quad \gamma = id'd''\varphi.$$

Nous introduisons dans la suite le scalaire positif $f = \exp \varphi$ et écrivons (5.2) sous la forme:

$$(5.3) \quad \gamma = id'd'' \log f \quad (f > 0).$$

Inversement à tout scalaire strictement positif f , (5.3) fait correspondre une 2-forme réelle γ de type (1, 1) homologue à 0. Si c est la forme hermitienne associée à γ , on a en coordonnées locales:

$$(5.4) \quad c_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta \log f \quad (f > 0)$$

ou indifféremment:

$$c_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta \log f.$$

b) Supposons que $c_1(W_n) = 0$. De l'étude précédente, il résulte que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe un scalaire positif f tel que:

$$(5.5) \quad R_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta \log f.$$

Nous sommes ainsi conduits à attacher à chaque domaine U de coordonnées

locales complexes le scalaire local strictement positif $k_U = f\sqrt{g_U}$ qui d'après (4.4) et (5.5) vérifie :

$$(5.6) \quad \partial_a \partial_{\bar{a}} \log k_U = \partial_a \partial_{\bar{a}} \log f + \partial_a \partial_{\bar{a}} \log \sqrt{g_U} = 0$$

De (5.6) on déduit immédiatement qu'il existe une fonction holomorphe locale a_U telle que :

$$k_U = a_U(z) \overline{a_U(z)} ;$$

k_U étant strictement positif, a_U ne saurait s'annuler sur U .

Les k_U correspondant aux différents domaines de coordonnées locales définissent sur W_n la *densité scalaire* (ou *noyau*) k associée à la $2n$ -forme $f\eta$. Soit V un domaine tel que $U \cap V$ soit connexe, $\mathcal{J}_V^U(z)$ le jacobien correspondant à U et V . Si k_V est la composante de k relative au domaine V , on a d'après la définition des densités scalaires, sur $U \cap V$,

$$k_V = \mathcal{J}_V^U \overline{\mathcal{J}_V^U} k_U .$$

Il vient ainsi :

$$a_V(z) \overline{a_V(z)} = \mathcal{J}_V^U(z) \overline{\mathcal{J}_V^U(z)} a_U(z) \overline{a_U(z)} \quad (z \in U \cap V) .$$

Il en résulte que les quantités

$$(5.7) \quad C_V^U = \frac{a_V(z)}{\mathcal{J}_V^U(z) a_U(z)} = \frac{\overline{\mathcal{J}_V^U(z)} \overline{a_U(z)}}{\overline{a_V(z)}}$$

sont sur $U \cap V$ des constantes $\neq 0$. On a donc :

$$a_V(z) = C_V^U \mathcal{J}_V^U(z) a_U(z)$$

avec $C_V^U \overline{C_V^U} = 1$. Il existe donc des constantes réelles φ_V^U telles que :

$$(5.8) \quad a_V(z) = e^{i\varphi_V^U} \mathcal{J}_V^U(z) a_U(z) \quad (z \in U \cap V) .$$

Soit W un troisième domaine de coordonnées locales tel que $U \cap W$ et $V \cap W$ soient connexes. On a

$$a_W(z) = e^{i\varphi_W^V} \mathcal{J}_W^V(z) a_V(z) \quad (z \in V \cap W) .$$

Si $z \in U \cap V \cap W$, on a donc :

$$a_W(z) = e^{i(\varphi_V^U + \varphi_W^V)} \mathcal{J}_V^U(z) \mathcal{J}_W^V(z) a_U(z) .$$

Il en résulte que les constantes introduites vérifient :

$$(5.9) \quad \varphi_{\tilde{W}}^{\tilde{U}} \equiv \varphi_{\tilde{V}}^{\tilde{U}} + \varphi_{\tilde{W}}^{\tilde{V}} \pmod{2\pi}.$$

c) Soit (\tilde{W}_n, p) le revêtement universel de W_n . Nous munissons \tilde{W}_n des éléments images réciproques par p de ceux introduits sur W_n . Introduisons un recouvrement de \tilde{W}_n par des domaines $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}, \dots$ tels que l'intersection de deux domaines soit connexe. Soit $\varphi_{\tilde{U}}$ une constante réelle attachée au domaine \tilde{U} . On en déduit pour un domaine \tilde{V} tel que $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ une constante $\varphi_{\tilde{V}}$ définie par :

$$\varphi_{\tilde{V}}^{\tilde{U}} \equiv \varphi_{\tilde{U}} - \varphi_{\tilde{V}} \pmod{2\pi}.$$

Si $\tilde{U} \cap \tilde{V} \cap \tilde{W} \neq \emptyset$, il y a cohérence d'après l'analogie de (5.9), puisque :

$$\varphi_{\tilde{W}}^{\tilde{U}} \equiv \varphi_{\tilde{U}}^{\tilde{V}} - \varphi_{\tilde{V}}^{\tilde{W}} \equiv (\varphi_{\tilde{U}} - \varphi_{\tilde{W}}) - (\varphi_{\tilde{U}} - \varphi_{\tilde{V}}) \equiv \varphi_{\tilde{V}} - \varphi_{\tilde{W}}. \pmod{2\pi}.$$

Ces constantes modulo 2π étant ainsi choisies pour le recouvrement envisagé de \tilde{W}_n , on a

$$(5.10) \quad e^{i\varphi_{\tilde{V}}} \tilde{a}_{\tilde{V}}(\tilde{z}) = \mathcal{J}_{\tilde{V}}^{\tilde{U}}(\tilde{z}) e^{i\varphi_{\tilde{U}}} \tilde{a}_{\tilde{U}}(\tilde{z}).$$

(5.10) exprime que les quantités $e^{i\varphi_{\tilde{V}}} \tilde{a}_{\tilde{V}}(\tilde{z})$ sont les composantes sur \tilde{W}_n d'une n -forme holomorphe $\tilde{\alpha}$, partout différente de zéro. Si s est un automorphisme de \tilde{W}_n correspondant à un élément du groupe fondamental $\pi_1(W_n)$, on a

$$(5.11) \quad s^* \tilde{\alpha} = e^{i\varphi(s)} \tilde{\alpha}$$

où $\varphi(s)$ est une constante réelle, définie modulo 2π .

Anisi si $c_1(W_n) = 0$, il existe sur \tilde{W}_n une n -forme holomorphe $\tilde{\alpha}$ partout $\neq 0$, vérifiant (5.11).

Un recouvrement satisfaisant à la condition énoncée peut, par exemple, être construit au moyen de "voisinages convexes" (voir Kobayashi—Nomizu ([5], p 166) pour la structure riemannienne envisagée.

d) Inversement supposant qu'il existe sur \tilde{W}_n une n -forme holomorphe $\tilde{\alpha}$ partout $\neq 0$, vérifiant (5.11), pour chaque élément de $\pi_1(W_n)$. La $2n$ -forme $\tilde{K} = \tilde{\alpha} \wedge \bar{\tilde{\alpha}}$, partout $\neq 0$, de \tilde{W}_n satisfait

$$s^* \tilde{K} = \tilde{K}.$$

Cette forme définit donc une $2n$ -forme de W_n dont le noyan k qui peut s'écrire localement $k = \tilde{a} \bar{\tilde{a}}$ vérifie :

$$-(2\pi)^{-1} i \partial_{\alpha} \bar{\partial}_{\beta} \log k_{\bar{U}} = 0.$$

Le premier membre définit une 2-forme de la classe de Chern. Il en résulte que $c_1(W_n) = 0$. Nous pouvons énoncer

Théorème. *Pour que la première classe de Chern $c_1(W_n)$ d'une variété kählérienne compacte W_n soit nulle, il faut et il suffit qu'il existe sur le revêtement universel \tilde{W}_n une n -forme holomorphe $\tilde{\alpha}$ partout différente de 0 et vérifiant (5.11) pour tout élément de $\pi_1(W_n)$.*

6. Sous-algèbre de L_n laissant invariante une $2n$ -forme ≥ 0

Donnons-nous sur W_n , kählérienne compacte, une $2n$ -forme non nulle

$$(6.1) \quad K = f\eta \quad (f \geq 0)$$

où f est un scalaire ≥ 0 . Par abus de langage, nous dirons que la $2n$ -forme K est supposée ≥ 0 .

A K est canoniquement associée un noyau k dont la composante relative à un domaine U est :

$$(6.2) \quad k_U = f\sqrt{g_U} \geq 0.$$

a) Soit L_h l'algèbre complexe de toutes les t -i holomorphes de W_n , L une sous algèbre complexe de L_h . Nous nous proposons d'exprimer que L laisse invariante la forme K ou—ce qui est équivalent—le noyau k [11].

La relation $\mathcal{L}(X)k = 0$ s'exprime localement, sur un domaine U , par :

$$(X^\alpha \partial_\alpha k_U + \partial_\alpha X^\alpha k_U) + (X^\alpha \partial_\alpha k_U + \partial_\alpha X^\alpha k_U) = 0.$$

De même $\mathcal{L}(JX)k = 0$ s'écrit :

$$i(X^\alpha \partial_\alpha k_U + \partial_\alpha X^\alpha k_U) - i(X^\alpha \partial_\alpha k_U + \partial_\alpha X^\alpha k_U) = 0.$$

Ainsi pour que X et JX laissent k invariant, il faut et il suffit que :

$$(6.3) \quad X^\alpha \partial_\alpha k_U + \partial_\alpha X^\alpha k_U = 0.$$

D'après (6.2) la relation précédente peut s'écrire :

$$X^\alpha (\partial_\alpha f \sqrt{g_U} + f \partial_\alpha \sqrt{g_U}) + \partial_\alpha X^\alpha f \sqrt{g_U} = 0$$

soit :

$$(6.4) \quad f \left(\partial_\alpha X^\alpha + \frac{\partial_\alpha \sqrt{g_U}}{\sqrt{g_U}} X^\alpha \right) + X^\alpha \partial_\alpha f = 0.$$

Or, d'après des formules classiques de géométrie kählérienne [8] :

$$\nabla_a X^\alpha = \partial_a X^\alpha + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha X^\lambda = \partial_a X^\alpha + \frac{\partial_\lambda \sqrt{g_U}}{\sqrt{g_U}} X^\lambda.$$

(6.4) peut ainsi s'écrire

$$f \nabla_a X^\alpha + X^\alpha \nabla_a f = 0$$

c'est-à-dire

$$(6.5) \quad \nabla_a (f X^\alpha) = 0.$$

Si $\xi = \alpha(X^{(1,0)})$ est la 1-forme de type (1, 0) associée à $X^{(1,0)}$, la relation (6.5) est équivalente à

$$(6.6) \quad \delta'(f\xi) = 0.$$

Ainsi pour que L laisse K invariante, il faut et il suffit que la 1-forme $\xi = \alpha(X^{(1,0)})$ associée à tout élément X de L vérifie la relation (6.6).

b) Si $X \in L$, la 1-forme d' -fermée ξ peut s'écrire :

$$(6.7) \quad \xi = d'\rho + H\xi.$$

Si $X \in L \cap I$, ξ est d' -homologue à 0 :

$$(6.8) \quad \xi = d'\rho.$$

ξ vérifiant (6.6), on a :

$$(6.9) \quad \langle fd'\rho, d'\rho \rangle = \langle \delta'(fd'\rho), \rho \rangle = 0$$

et par suite, f étant ≥ 0 , $fd'\rho = 0$. Soit V un domaine de W_n sur lequel f ne s'annule pas; $d'\rho = \xi$, donc le champ de vecteurs X correspondant, sont identiquement nuls sur V . Par analyticité, X est identiquement nul sur W_n et $L \cap I = 0$.

En particulier $[L, L]$ qui est contenu dans $L \cap I$ est nul.

Considérons l'application linéaire de l'espace vectoriel complexe L dans l'espace vectoriel complexe $H^{(1)}$ des 1-formes holomorphes définie par :

$$X \in L \rightarrow H\xi = H\alpha(X^{(1,0)}) \in H^{(1)}.$$

Cette application est injective puisque son noyau est $L \cap I = 0$. Il en résulte :

$$\dim_C L \leq \dim_C H^{(1)} = b_{1,0}(W_n).$$

Lemme 1. Toute sous-algèbre complexe L de L_h qui laisse invariante une $2n$ -forme $K \geq 0$ est abélienne et :

$$(6.10) \quad \dim_C L \leq b_{1,0}(W_n).$$

c) Soit T^p l'espace complexe des p -tenseurs holomorphes sur W_n . La situation précédente et les travaux de Kodaira nous conduisent à introduire le sous-espace $U^p(f)$ de T^p défini par les p -tenseurs holomorphes A vérifiant la condition :

$$(6.11) \quad \delta' \{f\alpha(A)\} = 0$$

où f est un scalaire ≥ 0 ([6]).

Si $A \in U^p(f)$ et si $k(A) = 0$, on sait que $H\alpha(A) = 0$ et on déduit de (6.11) par un raisonnement identique à celui du lemme 1 que $A = 0$. L'application linéaire de l'espace vectoriel complexe $U^p(f)$ dans l'espace vectoriel complexe $H^{(p)}$ des p -formes holomorphes définie par :

$$A \in U^p(f) \rightarrow H\alpha(A) \in H^{(p)}$$

est injective. Ainsi :

Lemme 2. *Pour tout $f \geq 0$, tout élément A de $U^p(f)$ qui vérifie $k(A) = 0$ est identiquement nul et*

$$(6.12) \quad \dim_c U^p(f) \leq b_{p,0}(W_n).$$

On notera qu'il résulte de ce lemme qu'un élément A de $U^p(f)$ ne peut s'annuler sans être identiquement nul. En effet si A s'annule en un point de W_n , $k(A) = 0$.

7. Invariance par L des éléments de $U^p(f)$

a) Soit X une t. i. holomorphe et soit A un p -tenseur holomorphe. Le transformé infinitésimal de A par X est le tenseur de type $(p, 0)$ défini, sur un domaine U de coordonnées locales complexes, par :

$$(7.1) \quad \{\mathcal{L}(X)A\}^{\rho_1 \dots \rho_p} = X^\lambda \partial_\lambda A^{\rho_1 \dots \rho_p} - \sum_{i=1}^p \partial_\lambda X^{\rho_i} A^{\rho_1 \dots \lambda \dots \rho_p}.$$

Les composantes de X et de A étant des fonctions holomorphes sur U , il en est de même des composantes du p -tenseur $\mathcal{L}(X)A$. Ainsi si $A \in T^p$, $X \in L_n$ on a $\mathcal{L}(X)A \in T^p$.

En introduisant des dérivées covariantes, (7.1) peut s'écrire :

$$\{\mathcal{L}(X)A\}^{\rho_1 \dots \rho_p} = X^\lambda \nabla_\lambda A^{\rho_1 \dots \rho_p} - \sum_{i=1}^p \nabla_\lambda X^{\rho_i} A^{\rho_1 \dots \lambda \dots \rho_p}$$

ou comme on le vérifie immédiatement :

$$(7.2) \quad \{\mathcal{L}(X)A\}^{\rho_1 \dots \rho_p} = X^\lambda \nabla_\lambda A^{\rho_1 \dots \rho_p} - \frac{1}{(p-1)!} \varepsilon_{\sigma_2 \dots \sigma_p}^{\rho_1 \dots \rho_p} \nabla_\lambda X^\sigma A^{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p}$$

où ε est le tenseur-indicateur de Kronecker.

b) Supposons maintenant que $A \in U^p(f)$, c'est-à-dire vérifie en outre :

$$\delta'\{f\alpha(A)\} = 0.$$

Cette relation peut s'écrire sur le domaine U :

$$(7.3) \quad \nabla_\lambda (f A^{\lambda \rho_2 \dots \rho_p}) = 0.$$

En explicitant la dérivation covariante, il vient sur U :

$$\nabla_\lambda (f A^{\lambda \rho_2 \dots \rho_p}) = \partial_\lambda (f A^{\lambda \rho_2 \dots \rho_p}) + \Gamma_{\lambda \sigma}^\lambda A^{\sigma \rho_2 \dots \rho_p} = \partial_\lambda (f A^{\lambda \rho_2 \dots \rho_p}) + \frac{\partial_\lambda \sqrt{g_U}}{\sqrt{g_U}} A^{\lambda \rho_2 \dots \rho_p}.$$

Il en résulte, par produit par $\sqrt{g_U}$, que (7.3) peut s'écrire :

$$\partial_\lambda (A^{\lambda \rho_2 \dots \rho_p} f \sqrt{g_U}) = 0$$

ou si l'on introduit le noyau k de composantes $k_U = f \sqrt{g_U}$:

$$(7.4) \quad \partial_\lambda (A^{\lambda \rho_2 \dots \rho_p} k_U) = 0.$$

Soit $X \in L$ laissant $K = f\eta$ invariante; $\mathcal{L}(X)$ commute avec ∂_λ et annule k ; par produit de (7.4) par $\mathcal{L}(X)$ on a ainsi :

$$\partial_\lambda \{(\mathcal{L}(X)A)^{\lambda \rho_2 \dots \rho_p} k_U\} = 0.$$

qui exprime que $\mathcal{L}(X)A$ appartient à $U^p(f)$.

c) Soit β une p -forme holomorphe sur W_n . Nous nous proposons d'abord d'obtenir une expression commode pour :

$$(\alpha(\mathcal{L}(X)A), \beta) = \frac{1}{p!} \{\mathcal{L}(X)A\}^{\rho_1 \dots \rho_p} \beta_{\rho_1 \dots \rho_p}.$$

D'après (7.2), il vient :

$$\begin{aligned} (\alpha(\mathcal{L}(X)A), \beta) &= \frac{1}{p!} X^\lambda \nabla_\lambda (A^{\rho_1 \dots \rho_p} \beta_{\rho_1 \dots \rho_p}) - \frac{1}{p!} X^\lambda A^{\rho_1 \dots \rho_p} \nabla_\lambda \beta_{\rho_1 \dots \rho_p} \\ &\quad - \frac{1}{(p-1)!} \nabla_\lambda X^\sigma A^{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p} \beta_{\sigma_2 \dots \sigma_p}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre étant nul, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 (\alpha(\mathcal{L}(X)A), \beta) &= -\frac{1}{(p-1)!} A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p} \nabla_\lambda (X^\sigma \beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p}) \\
 &\quad + \frac{1}{(p-1)!} A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p} X^\sigma \nabla_\lambda \beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p} - \frac{1}{p!} X^\lambda A^{\rho_1\cdots\rho_p} \nabla_\lambda \beta_{\rho_1\cdots\rho_p}.
 \end{aligned}$$

Soit en modifiant le nom des indices :

$$\begin{aligned}
 (7.5) \quad (\alpha(\mathcal{L}(X)A), \beta) &= -\frac{1}{(p-1)!} A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p} \nabla_\lambda (X^\sigma \beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p}) \\
 &\quad + \frac{1}{p!} X^\lambda [p A^{\sigma\tau_2\cdots\tau_p} \nabla_\sigma \beta_{\lambda\tau_2\cdots\tau_p} - A^{\rho_1\cdots\rho_p} \nabla_\lambda \beta_{\rho_1\cdots\rho_p}].
 \end{aligned}$$

La forme holomorphe β étant d' -fermée, on a :

$$\frac{1}{p!} \varepsilon_{\sigma_0\cdots\sigma_p}^{\lambda\rho_1\cdots\rho_p} \nabla_\lambda \beta_{\rho_1\cdots\rho_p} = 0.$$

En effectuant le produit contracté par $A^{\sigma_1\cdots\sigma_p}$ et distinguant les termes correspondant à $\lambda = \sigma_0$ ou $\lambda = \sigma_1, \dots, \sigma_p$, il vient :

$$A^{\sigma_1\cdots\sigma_p} (\nabla_{\sigma_0} \beta_{\sigma_1\cdots\sigma_p} - p \nabla_{\sigma_1} \beta_{\sigma_0\sigma_2\cdots\sigma_p}) = 0.$$

ce qui peut s'écrire :

$$A^{\sigma_1\cdots\sigma_p} \nabla_{\sigma_0} \beta_{\sigma_1\cdots\sigma_p} - p A^{\sigma\tau_2\cdots\tau_p} \nabla_\sigma \beta_{\sigma\sigma_2\cdots\sigma_p} = 0.$$

Le dernier terme du second membre de (7.5) est donc nul et l'on a :

$$(7.6) \quad (\alpha(\mathcal{L}(X)A), \beta) = -\frac{1}{(p-1)!} A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p} \nabla_\lambda (X^\sigma \beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p}).$$

Par produit par f il vient :

$$(f\alpha(\mathcal{L}(X)A), \beta) = -\frac{1}{(p-1)!} f A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p} \nabla_\lambda (X^\sigma \beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p}).$$

Mais A appartenant à $U^p(f)$ vérifie (7.3). Par suite :

$$(f\alpha(\mathcal{L}(X)A), \beta) = -\frac{1}{(p-1)!} \nabla_\lambda (f A^{\lambda\tau_2\cdots\tau_p} X^\sigma \beta_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p}).$$

Par intégration sur W_n , on obtient :

$$(7.7) \quad \langle f\alpha(\mathcal{L}(X)A), \beta \rangle = 0.$$

En particulier :

$$\langle f\alpha(\mathcal{L}(X)A), H\alpha(\mathcal{L}(X)A) \rangle = k(\mathcal{L}(X)A) \langle f, 1 \rangle = 0.$$

Ainsi $k(\mathcal{L}(X)A) = 0$ et du lemme 2 il résulte $\mathcal{L}(X)A = 0$. Nous énonçons :

Lemme 3. *Toute sous-algèbre complexe L de L_n qui laisse invariante une $2n$ -forme $K = f\eta \geq 0$, laisse invariant chaque élément de $U^p(f)$.*

8. Invariance des formes holomorphes—Application

a) Nous avons vu que sur une variété kählerienne compacte W_n , toute p -forme holomorphe β est fermée. Si $X \in L_n$, on a :

$$(8.1) \quad \mathcal{L}(X)\beta = (di(X) + i(X)d)\beta = di(X)\beta.$$

La forme $i(X)\beta$, de type $(p-1, 0)$ a pour composantes sur un domaine U de coordonnées locales

$$\{i(X)\beta\}_{\tau_2, \dots, \tau_p} = X^\lambda \beta_{\lambda\tau_2, \dots, \tau_p}.$$

Ainsi $i(X)\beta$ est holomorphe, donc fermée et $\mathcal{L}(X)\beta = 0$.

Proposition 1. *Sur une variété kählerienne compacte W_n , toute p -forme holomorphe est invariante par le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n .*

b) Reprenons une variété kählerienne compacte W_n telle que $b_{n,0}(W_n) \neq 0$. Il existe donc sur W_n une n -forme holomorphe β non identiquement nulle. Celle-ci est invariante pour toute t. i. holomorphe. Il en est donc de même pour la $2n$ -forme $K = \varepsilon_n \beta \wedge \bar{\beta}$ manifestement ≥ 0 . Nous posons :

$$(8.2) \quad K = \varepsilon_n \beta \wedge \bar{\beta} = f\eta \quad (f \geq 0).$$

Relativement à K , l'algèbre de Lie L_n de toutes les t. i. holomorphes vérifie les hypothèses du lemme 1. Ainsi :

Proposition 2. *Si W_n est une variété kählerienne compacte telle que $b_{n,0}(W_n) \neq 0$, le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W_n est abélien et $\dim_{\mathbb{R}} G \leq b_1(W_n)$.*

f étant défini par (8.2), il résulte du lemme 3 que le groupe G laisse invariant tout élément A de $U^p(f)$.

9. Identités relatives aux tenseurs holomorphes

a) A tout p -forme α de type $(p, 0)$, associons le $(p+1)$ -tenseur covariant de type $(p+1, 0)$ défini par :

$$(9.1) \quad a(\alpha)_{\lambda\rho_1\dots\rho_p} = \nabla_\lambda \alpha_{\rho_1\dots\rho_p}.$$

D'après (3.7), pour que le p -tenseur A de type $(p, 0)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $a\{\alpha(A)\} = 0$. Compte-tenu de la compacité de W_n , nous allons mettre cette condition du premier ordre sous la forme d'une condition du second ordre.

Etant donné un tenseur covariant t de type $(1, 1)$, nous introduisons l'opérateur $Q(t)$ sur les formes α de type $(p, 0)$ défini par :

$$Q(t)\alpha = \frac{2}{(p-1)!} t_\lambda^\mu \alpha_{\mu\sigma_2\dots\sigma_p} dz^\lambda \wedge dz^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge dz^{\sigma_p}.$$

On en déduit sur U :

$$(9.2) \quad \{Q(t)\alpha\}_{\rho_1\dots\rho_p} = \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1\dots\rho_p}^{\lambda\sigma_2\dots\sigma_p} t_\lambda^\mu \alpha_{\mu\sigma_2\dots\sigma_p}.$$

Soit R le tenseur de Ricci de la variété. D'après l'expression générale du laplacien $\Delta\alpha$ d'une forme, on a avec la notation (9.2) :

$$(\Delta\alpha)_{\rho_1\dots\rho_p} = -\nabla^k \nabla_k \alpha_{\rho_1\dots\rho_p} + \frac{1}{2} (Q(R)\alpha)_{\rho_1\dots\rho_p}.$$

On en déduit :

$$(9.3) \quad (\Delta\alpha - \frac{1}{2} Q(R)\alpha)_{\rho_1\dots\rho_p} = -\nabla^\lambda \nabla_\lambda \alpha_{\rho_1\dots\rho_p} - \nabla_\lambda \nabla^\lambda \alpha_{\rho_1\dots\rho_p}.$$

Or d'après l'identité de Ricci

$$(\nabla_\lambda \nabla^\lambda - \nabla^\lambda \nabla_\lambda) \alpha_{\rho_1\dots\rho_p} = -\sum_{i=1}^p R_{\rho_i}{}^\lambda \alpha_{\rho_1\dots\lambda\dots\rho_p} = -\frac{1}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1\dots\rho_p}^{\lambda\sigma_2\dots\sigma_p} R_{\lambda}{}^\mu \alpha_{\mu\sigma_2\dots\sigma_p}$$

soit :

$$(9.4) \quad \nabla_\lambda \nabla^\lambda \alpha_{\rho_1\dots\rho_p} = \nabla^\lambda \nabla_\lambda \alpha_{\rho_1\dots\rho_p} - \frac{1}{2} [Q(R)\alpha]_{\rho_1\dots\rho_p}.$$

De (9.3) et (9.4), il résulte :

$$(\Delta\alpha - Q(R)\alpha)_{\rho_1\dots\rho_p} = -2\nabla^\lambda \nabla_\lambda \alpha_{\rho_1\dots\rho_p}$$

c'est-à-dire l'identité :

$$(9.5) \quad (\Delta\alpha - Q(R)\alpha)_{\rho_1\dots\rho_p} = -2\nabla^\lambda a(\alpha)_{\lambda\rho_1\dots\rho_p}.$$

Si A est un p -tenseur holomorphe $a\{\alpha(A)\} = 0$ et $\alpha(A)$ est solution de l'équation elliptique :

$$(9.6) \quad \Delta\alpha(A) - Q(R)\alpha(A) = 0.$$

b) Associons à un p -tenseur A de type $(p, 0)$ la 1-forme $b(A)$ définie par :

$$b(A)_i = \frac{1}{p!} A^{p_1 \dots p_p} a\{\alpha(A)\}_{i p_1 \dots p_p}.$$

Dans la suite, nous écrivons $a(\alpha)$ pour $a\{\alpha(A)\}$. Par dérivation il vient :

$$\delta'b(A) = -\frac{1}{p!} \nabla^\lambda A^{p_1 \dots p_p} a(\alpha)_{i p_1 \dots p_p} - \frac{1}{p!} A^{p_1 \dots p_p} \nabla^\lambda a(\alpha)_{i p_1 \dots p_p}.$$

De (9.5) on déduit ainsi :

$$(9.7) \quad (\alpha, \Delta\alpha - Q(R)\alpha) = 2(p+1)(a(\alpha), a(\alpha)) + 2\delta'b(A).$$

Par intégration sur W_n , il vient :

$$\langle \Delta\alpha - Q(R)\alpha, \alpha \rangle = 2(p+1)\langle a(\alpha), a(\alpha) \rangle$$

où le second membre est positif et n'est nul que pour $a(\alpha) = 0$. Ainsi (voir [8]) :

Proposition 1. *Etant donnée une variété kählerienne compacte W_n , on a pour toute forme α de type $(p, 0)$ la relation :*

$$(9.8) \quad \langle \Delta\alpha - Q(R)\alpha, \alpha \rangle = 2(p+1)\langle a(\alpha), a(\alpha) \rangle.$$

Pour qu'un p -tenseur A de type $(p, 0)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $\alpha(A)$ vérifie :

$$(9.9) \quad \langle \Delta\alpha(A) - Q(R)\alpha(A), \alpha(A) \rangle = 0$$

ou soit solution de l'équation :

$$\Delta\alpha(A) - Q(R)\alpha(A) = 0.$$

10. Introduction d'un scalaire $f > 0$

a) Sur la variété kählerienne compacte W_n , donnons-nous un scalaire $f > 0$ et introduisons, en accord avec les travaux de Kodaira, l'espace complexe $F^p(f)$ des p -formes α de type $(p, 0)$, d' -fermées

$$(10.1) \quad d'\alpha = 0$$

et vérifiant la condition

$$(10.2) \quad \delta'(f\alpha) = 0.$$

Soit \mathcal{F} le fibré vectoriel complexe trivial de W_n , $\Omega^\circ(\mathcal{F})$ le faisceau des fonctions holomorphes à coefficients dans \mathcal{F} . D'après Kodaira :

$$\dim_{\mathbb{C}} F^p(f) = \dim_{\mathbb{C}} H^p(W_n, \Omega^\circ(\mathcal{F}))$$

et d'après un résultat classique de Dolbeault :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^p(W_n, \Omega^\circ(\mathcal{F})) = b_{p,0}(W_n).$$

Il vient ainsi :

$$(10.3) \quad \dim_{\mathbb{C}} F^p(f) = b_{p,0}(W_n).$$

Introduisons sur les formes α de type $(p, 0)$ les opérateurs :

$$(10.4) \quad \delta'_f \alpha = \bar{f}^1 \delta'(f\alpha), \quad \Delta_f = 2(d'\delta'_f + \delta'_f d')$$

et le produit scalaire global :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_f = \langle \alpha, f\beta \rangle.$$

δ'_f est le *transposé de d' pour ce produit scalaire*. En effet si α est une forme de type $(p+1, 0)$ et β une forme de type $(p, 0)$, on a :

$$\langle \delta'_f \alpha, \beta \rangle_f = \langle \delta'(f\alpha), \beta \rangle = \langle f\alpha, d'\beta \rangle = \langle \alpha, d'\beta \rangle_f.$$

Δ_f est une généralisation du laplacien Δ de G. de Rham. Si α est une forme de type $(p, 0)$:

$$\langle \Delta_f \alpha, f\alpha \rangle = \langle \Delta_f \alpha, \alpha \rangle_f = 2\langle \delta'_f \alpha, \delta'_f \alpha \rangle_f + 2\langle d'\alpha, d'\alpha \rangle_f.$$

Il vient ainsi :

$$(10.5) \quad \langle \Delta_f \alpha, f\alpha \rangle = 2\langle \delta'_f \alpha, f\delta'_f \alpha \rangle + 2\langle d'\alpha, fd'\alpha \rangle.$$

Nous voyons que $\langle \Delta_f \alpha, f\alpha \rangle$ est positif et n'est nul que pour :

$$d'\alpha = 0, \quad \delta'_f \alpha = 0$$

c'est-à-dire pour les éléments de $F^p(f)$. Il en résulte que les éléments de $F^p(f)$ coïncident avec les solutions de l'équation :

$$\Delta_f \alpha = 0.$$

b) Il est aisé de donner de Δ_f une expression simple en fonction de Δ et de f . Pour une forme α de type $(p, 0)$, on a :

$$\Delta_f \alpha = 2d'\{f^{-1}\delta'(f\alpha)\} + 2f^{-1}\delta'(fd'\alpha).$$

On en déduit en explicitant en coordonnées locales les dérivations :

$$(\Delta_f \alpha)_{\rho_1 \dots \rho_p} = - \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\mu \sigma_2 \dots \sigma_p} \nabla_\mu \{f^{-1} \nabla^\lambda (f \alpha_{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p})\} - 2f^{-1} \nabla^\lambda \{f (d' \alpha)_{\lambda \rho_1 \dots \rho_p}\}$$

ou en développant :

$$\begin{aligned} (\Delta_f \alpha)_{\rho_1 \dots \rho_p} = & - \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\mu \sigma_2 \dots \sigma_p} \nabla_\mu \nabla^\lambda \alpha_{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p} - 2 \nabla^\lambda (d' \alpha)_{\lambda \rho_1 \dots \rho_p} \\ & - \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\mu \sigma_2 \dots \sigma_p} \nabla_\mu \{(f^{-1} \nabla^\lambda f) \alpha_{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p}\} - 2(f^{-1} \nabla^\lambda f) (d' \alpha)_{\lambda \rho_1 \dots \rho_p}. \end{aligned}$$

Sous forme intrinsèque, il vient :

$$(10.6) \quad \Delta_f = \Delta - 2d' i(f^{-1} d'' f) - 2i(f^{-1} d'' f) d'$$

où, pour une forme α de type $(p, 0)$, on a posé :

$$(10.7) \quad \{i(f^{-1} d'' f) \alpha\}_{\sigma_2 \dots \sigma_p} = (f^{-1} \nabla^\lambda f) \alpha_{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p}.$$

c) Nous posons dans la suite :

$$(10.8) \quad R_{\alpha\bar{\beta}} = c_{\alpha\bar{\beta}} + \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \log f \quad (f > 0)$$

où la forme hermitienne c définit ainsi une 2-forme réelle fermée γ de type $(1, 1)$ telle que $[\gamma]$ est proportionnelle à $c_1(W_n)$. On peut obtenir, pour $f > 0$ arbitraire, une généralisation de la proposition du paragraphe précédent. D'après (9.7) :

$$(f\alpha, \Delta\alpha - Q(R)\alpha) = 2(p+1)(fa(\alpha), a(\alpha)) + 2f\delta'b(A).$$

Or :

$$f\delta'b(A) = \delta'(fb(A)) + i(d''f)b(A)$$

où

$$i(d''f)b(A) = \nabla^\lambda f A^{\rho_1 \dots \rho_p} \nabla_\lambda \alpha(A)_{\rho_1 \dots \rho_p} = (f^{-1} \nabla^\lambda f) \nabla_\lambda \alpha(A)_{\rho_1 \dots \rho_p} f A^{\rho_1 \dots \rho_p}.$$

Posons :

$$(\nabla_{f^{-1} d'' f} \alpha)_{\rho_1 \dots \rho_p} = (f^{-1} \nabla^\lambda f) \nabla_\lambda \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p}.$$

On obtient ainsi :

$$(10.9) \quad (f\alpha, \Delta\alpha - Q(R)\alpha - 2\nabla_{f^{-1} d'' f} \alpha) = 2(p+1)(fa(\alpha), a(\alpha)) + 2\delta'\{fb(A)\}.$$

Par intégration sur W_n , nous obtenons :

$$(10.10) \quad \langle \Delta\alpha - Q(R)\alpha - 2V_{f^{-1}d''f}\alpha, f\alpha \rangle = 2(p+1)\langle a(\alpha), fa(\alpha) \rangle$$

où le second membre est encore positif et n'est nul que pour $a(\alpha) = 0$.

d) De la décomposition (10.8) de R on déduit d'autre part que si α est une forme de type $(p, 0)$:

$$\{Q(R)\alpha - Q(c)\alpha\}_{\rho_1 \dots \rho_p} = \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\lambda\sigma_2 \dots \sigma_p} \nabla_{\lambda} \nabla^{\mu} \log f \alpha_{\mu\sigma_2 \dots \sigma_p}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \{Q(R)\alpha - Q(c)\alpha\}_{\rho_1 \dots \rho_p} &= \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\lambda\sigma_2 \dots \sigma_p} \nabla_{\lambda} \{f^{-1} \nabla^{\mu} f \alpha_{\mu\sigma_2 \dots \sigma_p}\} \\ &\quad - \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\lambda\sigma_2 \dots \sigma_p} f^{-1} \nabla^{\mu} f \nabla_{\lambda} \alpha_{\mu\sigma_2 \dots \sigma_p} \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, avec la notation introduite dans (10.7) :

$$(10.11) \quad \begin{aligned} \{Q(R)\alpha - Q(c)\alpha - 2d'i(f^{-1}d''f)\alpha\}_{\rho_1 \dots \rho_p} \\ = - \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\lambda\sigma_2 \dots \sigma_p} f^{-1} \nabla^{\mu} f \nabla_{\lambda} \alpha_{\mu\sigma_2 \dots \sigma_p} \end{aligned}$$

Considérons la forme $2i(f^{-1}d''f)d'\alpha$ qui a pour composantes :

$$2\{i(f^{-1}d''f)d'\alpha\}_{\rho_1 \dots \rho_p} = \frac{2}{p!} \varepsilon_{\rho_0 \dots \rho_p}^{\lambda\sigma_1 \dots \sigma_p} f^{-1} \nabla^{\rho_0} f \nabla_{\lambda} \alpha_{\sigma_1 \dots \sigma_p}$$

En distinguant le cas $\rho_0 = \lambda$ et le cas $\rho_0 = \sigma_1, \dots, \sigma_p$, il vient :

$$(10.12) \quad \begin{aligned} 2\{i(f^{-1}d''f)d'\alpha\}_{\rho_1 \dots \rho_p} &= 2f^{-1} \nabla^{\rho_0} f \nabla_{\rho_0} \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p} \\ &\quad - \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\lambda\sigma_2 \dots \sigma_p} f^{-1} \nabla^{\rho_0} f \nabla_{\lambda} \alpha_{\rho_0 \sigma_2 \dots \sigma_p} \end{aligned}$$

De (10.11) et (10.12), on déduit ainsi que si α est une forme de type $(p, 0)$, on a la relation :

$$(10.13) \quad Q(R)\alpha + 2V_{f^{-1}d''f}\alpha = Q(c)\alpha + 2\{d'i(f^{-1}d''f) + i(f^{-1}d''f)d'\}\alpha$$

et (10.10) peut s'écrire compte-tenu de l'expression (10.6) de Δ_f :

$$\langle \Delta_f \alpha - Q(c)\alpha, f\alpha \rangle = 2(p+1)\langle a(\alpha), fa(\alpha) \rangle$$

Nous pouvons énoncer :

Proposition 2. *Etant donnée une variété kählerienne compacte W_n et un scalaire $f > 0$ sur W_n , on a pour toute forme α de type $(p, 0)$ la relation :*

$$(10.14) \quad \langle \Delta_f \alpha - Q(c)\alpha, f\alpha \rangle = 2(p+1) \langle a(\alpha), fa(\alpha) \rangle .$$

Pour qu'un p -tenseur A de type $(p, 0)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $\alpha(A)$ vérifie :

$$(10.15) \quad \langle \Delta_f \alpha(A) - Q(c)\alpha(A), f\alpha(A) \rangle = 0$$

ou soit solution de l'équation :

$$(10.16) \quad \Delta_f \alpha(A) - Q(c)\alpha(A) = 0 .$$

11. Variété kählerienne à classe de Chern $c_1(W_n) \leq 0$

Supposons que la variété kählerienne compacte W_n admette au sens du paragraphe 4, une première classe de Chern $c_1(W_n) \leq 0$. Le tenseur de Ricci de la variété vérifie alors la relation (10.8), soit :

$$(11.1) \quad R_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\beta \log f \quad (f > 0)$$

où la forme hermitienne c , de coefficients $c_{\alpha\beta}$, est *négative ou nulle en tout point de W_n* .

a) Si α est une p -forme arbitraire de type $(p, 0)$, considérons la forme $Q(c)\alpha$ donnée par

$$(Q(c)\alpha)_{\rho_1 \dots \rho_p} = \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p} c_{\lambda^\mu} \alpha_{\mu \sigma_2 \dots \sigma_p} .$$

Par abus de notation, nous notons encore α le p -tenseur associé à la forme α par conjugaison et dualité définie par la métrique. Il vient :

$$(Q(c)\alpha, \alpha) = \frac{2}{(p-1)!} \alpha^{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p} c_{\lambda^\mu} \alpha_{\mu \sigma_2 \dots \sigma_p} .$$

Soit

$$(11.2) \quad (Q(c)\alpha, \alpha) = \frac{2}{(p-1)!} c_{\lambda^\mu} \alpha^{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p} \alpha_{\mu \sigma_2 \dots \sigma_p} .$$

De l'hypothèse faite sur c , il résulte ainsi :

$$(11.3) \quad (Q(c)\alpha, \alpha) \leq 0$$

en tout point de W_n .

b) Soit $A \in T^p$ un p -tenseur holomorphe arbitraire de W_n . D'après la proposition 2 du paragraphe 10

$$(11.4) \quad \langle \Delta_f \alpha(A) - Q(c)\alpha(A), f\alpha(A) \rangle = 0.$$

Mais d'après (10.5) et (11.3):

$$\langle \Delta_f \alpha(A), f\alpha(A) \rangle \geq 0, \quad - \langle Q(c)\alpha(A), f\alpha(A) \rangle \geq 0.$$

Il en résulte, en vertu de (10.5), $\delta'_f \alpha(A) = 0$, soit la relation:

$$\delta' \{f\alpha(A)\} = 0$$

et T^p coïncide avec $U^p(f)$. Il en est en particulier ainsi pour $p = 1$, c'est-à-dire pour l'espace des vecteurs holomorphes. Par suite l'algèbre L_n laisse invariante la $2n$ -forme positive $K = f\eta$. Des lemmes 1 et 3, on déduit le théorème suivant:

Théorème 1. *Si une variété kählérienne compacte W_n vérifie $c_1(W_n) \leq 0$, tout p -tenseur holomorphe est invariant par le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W_n et:*

$$\dim_{\mathbb{C}} T^p \leq b_{p,0}(W_n).$$

En particulier G est abélien et:

$$\dim_{\mathbb{R}} G \leq b_1(W_n).$$

12. Variété kählérienne à classe de Chern $c_1(W_n) \geq 0$

Supposons maintenant que la variété kählérienne compacte W_n admette, au sens du paragraphe 4, une première classe de Chern $c_1(W_n) \geq 0$. On a encore (11.1) où la forme hermitienne c est positive ou nulle en tout point de W_n .

a) Si $\alpha \in F^p(f)$, on a $\Delta_f \alpha = 0$ et il résulte de (10.14):

$$\langle Q(c)\alpha, f\alpha \rangle = -2(p+1) \langle a(\alpha), fa(\alpha) \rangle.$$

Mais d'après (11.2) et l'hypothèse faite sur c

$$\langle Q(c)\alpha, f\alpha \rangle \geq 0.$$

On en déduit:

$$(12.1) \quad \langle a(\alpha), fa(\alpha) \rangle = 0, \quad \langle Q(c)\alpha, f\alpha \rangle = 0$$

et par suite $a(\alpha) = 0$. Ainsi $\alpha \in F^p(f)$ est nécessairement forme associée à un p -tenseur holomorphe $A \in U^p(f)$ et l'on a:

$$\dim_{\mathbb{C}} U^p(f) = \dim_{\mathbb{C}} F^p(f) = b_{p,0}(W_n).$$

Il résulte de lemme 2 du paragraphe 6 que si la constante $(\alpha, H\alpha)$ est nulle, α est nécessairement nulle. L'application linéaire de l'espace vectoriel complexe $F^p(f)$ dans l'espace vectoriel complexe $H^{(p)}$ définie par :

$$\alpha \in F^p(f) \rightarrow H\alpha \in H^{(p)}$$

est *bijective*. D'autre part une p -forme holomorphe de W_n ne peut s'annuler en un point sans être identiquement nulle. Il en résulte :

$$b_{p,0}(W_n) \leq C_n^p.$$

b) Considérons en particulier le cas $p = 1$. Soit L la sous-algèbre complexe de L_h définie par les t.i. holomorphes laissant invariante la $2n$ -forme positive $K = f\eta$. Cette sous algèbre de dimension $b_{1,0}(W_n)$ est abélienne d'après le lemme 1 du paragraphe 6 et laisse invariant chaque élément de $U^p(f)$ d'après le lemme 3.

Si I est l'idéal introduit au paragraphe 2, il résulte de l'analyse du a que L_h/I admet un isomorphisme naturel sur L et L_h admet la décomposition en somme directe $L_h = I + L$. Nous obtenons

Théorème 2. *Si une variété kählerienne compacte W_n vérifie $c_1(W_n) \geq 0$, on a pour le scalaire $f > 0$ vérifiant (11.1) :*

$$\dim_{\mathbb{C}} U^p(f) = b_{p,0}(W_n) \leq C_n^p$$

et par suite $\dim_{\mathbb{C}} T^p \geq b_{p,0}(W_n)$. Une forme holomorphe non identiquement nulle ne peut s'annuler. L'algèbre L_h admet la décomposition en somme directe :

$$(12.2) \quad L_h = I + L,$$

où L est une sous-algèbre complexe abélienne de L_h , de dimension complexe $b_{1,0}(W_n)$, qui laisse invariant chaque élément de $U^p(f)$.

Supposons toujours $c_1(W_n) \geq 0$; si $b_{n,0}(W_n) \neq 0$, il existe une n -forme holomorphe non identiquement nulle sur W_n et cette forme ne peut s'annuler nulle part. Par suite $c_1(W_n) = 0$.

Ainsi si $c_1(W_n) \geq 0$ n'est pas nulle, on a $b_{n,0}(W_n) = 0$.

13. Etude de cas particuliers

a) Supposons que $c_1(W_n)$ contienne une 2-forme telle que la forme hermitienne associée c , partout négative ou nulle, soit définie négative en un point z_0 de W_n . Nous dirons que $c_1(W_n) \leq 0$ est *localement définie négative*.

Si A est un p -tenseur holomorphe de W_n , il appartient à $U^p(f)$ et il résulte de (11.4) que $\alpha(A)$ vérifie partout

$$(Q(c)\alpha(A), f\alpha(A)) = 0.$$

D'après (11.2), cette égalité entraîne qu'au point z_0 , $\alpha(A)$ donc A s'annulent. Mais A appartenant à $U^p(f)$ ne peut, d'après le lemme 2, s'annuler sans être identiquement nul. Ainsi :

Corollaire 1. *Si $c_1(W_n) \leq 0$ est localement définie négative, il n'existe sur W_n aucun p -tenseur holomorphe non identiquement nul. En particulier le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W_n est réduit à l'identité.*

Nous obtenons ainsi une généralisation d'un théorème dû à Nakano et relatif au cas où $c_1(W_n)$ est définie négative (c partout définie négative). Sous cette dernière hypothèse, Andreotti et S Kobayashi [3] ont montré récemment que le groupe de toutes les transformations holomorphes de W_n est fini.

b) Supposons maintenant que $c_1(W_n)$ contienne une 2-forme telle que la forme hermitienne c associée, partout positive ou nulle, soit définie positive en un point z_0 de W_n . Nous dirons alors que $c_1(W_n) \geq 0$ est localement définie positive.

Si $\alpha \in F^p(f)$, il résulte de (12.1) que α vérifie partout :

$$(Q(c)\alpha, \alpha) = 0.$$

D'après (11.2) cette égalité entraîne encore qu'au point z_0 , α s'annule. Mais, d'après l'hypothèse faite, α est associée à un élément A de $U^p(f)$ et ne peut s'annuler sans être identiquement nulle. On voit ainsi que $b_{p,0}(W_n) = 0$ ($p = 1, \dots, n$). Ainsi :

Corollaire 2. *Si $c_1(W_n) \geq 0$ est localement définie positive, il n'existe sur W_n aucune p -forme holomorphe non identiquement nulle. En particulier le premier nombre de Betti $b_1(W_n)$ est nul.*

c) Supposons enfin $c_1(W_n) = 0$. Les résultats des deux théorèmes fondamentaux des paragraphes 11 et 12 sont simultanément valables. De

$$\dim_C T^p \leq b_{p,0}(W_n), \quad \dim_C T^p \geq b_{p,0}(W_n)$$

on déduit

$$\dim_C T^p = b_{p,0}(W_n).$$

Pour $p = 1$

$$\dim_C L_h = b_{1,0}(W_n)$$

et I est nul. Ainsi

Corollaire 3. *Si $c_1(W_n) = 0$, un p -tenseur holomorphe ou une p -forme holomorphe $\neq 0$ ne peuvent s'annuler. Tout p -tenseur holomorphe est invariant par toute transformation infinitésimale holomorphe et*

$$\dim_{\mathbb{C}} T^p = b_{p,0}(W_n).$$

En particulier le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W_n est abélien et

$$\dim_{\mathbb{R}} G = b_1(W_n).$$

14. Variété de Hodge à $c_1(W_n) \geq 0$ et localement définie positive

a) Supposons que W_n soit une variété de Hodge (variété algébrique) compacte: la 2-forme fondamentale F de W_n admet des périodes entières. Si $\chi(W_n)$ est le genre arithmétique de la variété, on a, d'après un résultat classique de Kodaira et Spencer:

$$(14.1) \quad \chi(W_n) = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_{p,0}(W_n).$$

Soit \tilde{W}_n un revêtement d'ordre q de W_n que nous supposerons muni de la métrique et de la 2-forme images réciproques de celles de W_n . La variété \tilde{W}_n est aussi variété de Hodge. En appliquant la version de Hirzebruch du théorème de Riemann-Roch, S. Kobayashi [4] a établi le lemme suivant:

Lemme 4. *Soit \tilde{W}_n un revêtement d'ordre q d'une variété de Hodge compacte W_n . On a:*

$$(14.2) \quad \chi(\tilde{W}_n) = q\chi(W_n).$$

b) Supposons en outre que $c_1(W_n) \geq 0$ soit localement définie positive. Il en est alors évidemment de même pour \tilde{W}_n et il résulte de (14.1) et du corollaire 2 du paragraphe 13:

$$\chi(W_n) = 1, \quad \chi(\tilde{W}_n) = 1.$$

On a donc nécessairement $q = 1$ d'après le lemme 4. Le groupe fondamental $\pi_1(W_n)$ de la variété envisagée ne peut admettre de sous-groupe propre d'indice fini.

Le premier nombre de Betti de W_n étant nul, le groupe $H_1(W_n, \mathbb{Z})$ est fini. Le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(W_n)$ ne peut que coïncider avec $\pi_1(W_n)$ et l'on a:

$$H_1(W_n, \mathbb{Z}) = 0.$$

Ce raisonnement, dû à Kobayashi, conduit au théorème suivant

Théorème 3. Soit W_n une variété de Hodge compacte telle que $c_1(W_n) \geq 0$ soit localement définie positive. Pour une telle variété :

$$H_1(W_n, \mathbb{Z}) = 0.$$

15. Cas d'une courbure scalaire constante

Nous nous proposons d'étudier le cas d'une variété kählérienne dont la courbure scalaire $\text{Tr. } R$ est constante.

a) Nous allons d'abord établir le lemme suivant

Lemme 5. Pour toute p -forme holomorphe β , on a sur une variété kählérienne :

$$(15.1) \quad \delta'Q(R)\beta = -i(d \text{Tr. } R)\beta.$$

En effet de :

$$(Q(R)\beta)_{\rho_1 \dots \rho_p} = \frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p} R_{\lambda}^{\mu} \beta_{\mu \sigma_2 \dots \sigma_p}.$$

On déduit qu'en coordonnées locales complexes :

$$(\delta'Q(R)\beta)_{\rho_2 \dots \rho_p} = -\frac{2}{(p-1)!} \varepsilon_{\nu \rho_2 \dots \rho_p}^{\lambda \sigma_2 \dots \sigma_p} \nabla^{\nu} R_{\lambda}^{\mu} \beta_{\mu \sigma_2 \dots \sigma_p}.$$

En distinguant au second membre les termes pour lesquels $\nu = \lambda$ et ceux pour lesquels $\nu = \sigma_2, \dots, \sigma_p$, il vient

$$(\delta'Q(R)\beta)_{\rho_2 \dots \rho_p} = -2\nabla^{\nu} R_{\nu}^{\mu} \beta_{\mu \rho_2 \dots \rho_p} + \frac{2}{(p-2)!} \varepsilon_{\rho_2 \dots \rho_p}^{\lambda \sigma_3 \dots \sigma_p} \nabla^{\nu} R_{\lambda}^{\mu} \beta_{\mu \nu \sigma_3 \dots \sigma_p}.$$

Le tenseur de Ricci d'une variété kählérienne vérifie :

$$\nabla^{\nu} R_{\lambda}^{\mu} = \nabla^{\mu} R_{\lambda}^{\nu}.$$

Comme $\beta_{\mu \nu \sigma_3 \dots \sigma_p}$ est antisymétrique en μ et ν le second terme du membre de droite est nul. D'autre part, d'après l'identité de Bianchi :

$$2\nabla^{\nu} R_{\nu}^{\mu} = \nabla^{\mu} (\text{Tr. } R)$$

et il vient :

$$\delta'Q(R)\beta = -i(d \text{Tr. } R)\beta.$$

Si $\text{Tr. } R = \text{const.}$, $\delta'Q(R)\beta = 0$.

b) Du lemme précédent, on déduit :

Lemme 6. Soit $A \in T^p$ un p -tenseur holomorphe sur la variété kählerienne compacte W_n à courbure scalaire constante. Dans la décomposition :

$$\alpha(A) = d'\mu + H\alpha(A)$$

la p -forme holomorphe $H\alpha(A)$ est à dérivée covariante nulle.

D'après la proposition 1 du paragraphe 9, $\alpha(A)$ vérifie l'équation :

$$\Delta\alpha(A) - Q(R)\alpha(A) = 0.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle \Delta d'\mu - Q(R)d'\mu, d'\mu \rangle &= - \langle \Delta H\alpha(A) - Q(R)H\alpha(A), d'\mu \rangle \\ &= \langle Q(R)H\alpha(A), d'\mu \rangle \end{aligned}$$

soit

$$\langle \Delta d'\mu - Q(R)d'\mu, d'\mu \rangle = \langle \delta'Q(R)H\alpha(A), \mu \rangle.$$

Mais d'après le lemme 5, le second membre est nul. De la proposition 1 du paragraphe 9, il résulte que la p -forme $d'\mu$ et, par suite, la p -forme $H\alpha(A)$ sont associées à des p -tenseurs holomorphes ; $H\alpha(A)$ vérifie donc les relations :

$$\nabla_i \{H\alpha(A)\}_{\rho_1 \dots \rho_p} = 0, \quad \nabla_i \{H\alpha(A)\}_{\rho_1 \dots \rho_p} = 0$$

et est ainsi à dérivée covariante nulle.

c) Une variété riemannienne est dite irréductible si son groupe d'holonomie connexe est irréductible (dans le réel). Nous allons établir le lemme suivant :

Lemme 7. Soit W_n une variété kählerienne compacte telle que $c_1(W_n) \geq 0$, sans être nulle. Si W_n est irréductible et à courbure scalaire constante, on a :

$$b_{p,0}(W_n) = 0 \quad (p = 1, \dots, n).$$

En effet, d'après le raisonnement conduisant au théorème 2, toute p -forme holomorphe β de W_n peut s'écrire $\beta = H\alpha(A)$, où A est un p -tenseur holomorphe. Il résulte du lemme 6 que, sous les hypothèses faites, toute p -forme holomorphe β de W_n est à dérivée covariante nulle, donc vérifie simultanément $\Delta\beta = 0$, $\Delta\beta - Q(R)\beta = 0$ et par suite $Q(R)\beta = 0$.

On en déduit :

$$(Q(c)\beta, \beta) + 2\nabla_i (\nabla_{\bar{i}} \log f \beta^{\sigma_1 \dots \sigma_p} \bar{\beta}^{\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_p}) = 0.$$

Par intégration sur W_n , il vient :

$$\langle Q(c)\beta, \beta \rangle = 0.$$

$(Q(c)\beta, \beta)$ étant nécessairement ≥ 0 , on en déduit :

$$(Q(c)\beta, \beta) = 0$$

soit en coordonnées locales :

$$(15.2) \quad c_{\lambda\bar{\mu}} \beta^{\lambda\sigma_2 \dots \sigma_p} \beta^{\bar{\mu}\sigma_2 \dots \sigma_p} = 0.$$

Si $\beta \neq 0$ est une p -forme holomorphe, il résulte de l'irréductibilité de W_n :

$$\beta^{\lambda\sigma_2 \dots \sigma_p} \beta^{\bar{\mu}\sigma_2 \dots \sigma_p} = ag^{\lambda\bar{\mu}} \quad (a = \text{const.} \neq 0)$$

puisque le premier membre est à dérivée covariante nulle. De (15.2), il résulterait alors $\text{Tr. } c \equiv 0$, ce qui est contraire aux hypothèses du lemme. On en déduit $b_{p,0}(W_n) = 0$ ($p = 1, \dots, n$).

b) Supposons que W_n , variété de Hodge, satisfasse aux hypothèses du lemme 7. Le raisonnement du paragraphe 14 s'applique sans modification à la situation présente et l'on a (voir [4])

Théorème 4. *Soit W_n une variété de Hodge compacte telle que $c_1(W_n) \geq 0$, sans être nulle. Si W_n est irréductible et à courbure scalaire constante, on a :*

$$H_1(W_n, \mathbb{Z}) = 0.$$

Bibliographie

- [1] Y. Akizuki & S. Nakano, *Note on Kodaira—Spencer's proof of Lefschetz theorems*, Proc. Japan Acad. **30** (1954) 266–272.
- [2] S. S. Chern, *Characteristic classes of Hermitian manifolds*, Ann. of Math. **47** (1948) 85–121.
- [3] S. Kobayashi, *On the automorphism group of a certain class of algebraic manifolds*, Tôhoku Math. J. **11** (1959) 184–190.
- [4] —, *On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor*, Ann. of Math. **74** (1961) 570–573.
- [5] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol I, Interscience, New York, 1963.
- [6] K. Kodaira, *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953) 1268–1273.
- [7] K. Kodaira & D. C. Spencer, *On arithmetic genera of algebraic varieties*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953) 641–649.
- [8] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Rome, 1955; *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.
- [9] —, *Isométries et transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959) 427–437.
- [10] —, *Sur certaines variétés kählériennes compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris **263** (1966) 570–575.
- [11] —, *Variétés complexes et tenseur de Bergmann*, Ann. Inst. Fourier (Genève) **15** (1965) 345–407.